ベイズ統計を用いた故障分布関数の更新

Revision of Failure Distribution Functions by Using Beyesian Statistics

秋田県立大学　　笠井　雅夫　Masao KASAI　　Member

Abstract This study proposes the innovative method for evaluating the failure distribution functions that are essentially necessary to optimize the replacement interval of plant equipment. It is not easy to precisely evaluate the parameters of failure distribution functions since the enough failure data can not be easily obtained in Japanese plants. Then it is important to evaluate the confidence interval of the parameters of distribution functions to consider the risks due to the equipment failures. It is also not easy to evaluate the confidence interval by the ordinary static method. So this study proposes to use the Bayesian method that can easily evaluate the confidence distributions as posterior distribution and compares the evaluation results by maximum likelihood estimation method. I found that both estimation methods give almost the same results as for the point estimation and Bayesian method is preferable to evaluate the confidence distributions of the parameters of failure distribution functions.

Keywords : Failure Distribution Function, Maximum Likelihood Estimation Method, Bayesian Estimation Method, Plant Maintenance, Optimization of Replacement Interval

1．緒言

プラントの保全合理化の１つのテーマとして、機器／部品類の取替周期の最適化がある[1][2][3]。こうした最適化を図るためには、故障率や故障分布関数のデータが不可欠である。一方、日本のプラントの場合、トラブルを恐れるあまり、寿命に達するかなり前に交換されてしまうため、安全に関わる機器はともかく、一般機器のデータまで十分整備されている訳ではない。特に、故障分布関数の整備は遅れている。こうした状況では、また、故障分布関数を推定するための一貫したデータセットを収集する事は難しいと考えられ、社内試験や異なるプラントあるいは更に異なる種類のプラント等におけるデータをベースに、少ない実プラントでのデータと合わせて推定しなければならない。そのための手法の１つとしてベイズ推定がある[4]。

しかし、こうした推定には誤差が付きのもで、リスクを考慮するためには、この誤差も考慮することが必要である。ベイズ推定では、事後分布によりこういった誤差を考慮することができる[4]。実プラントでのデータそのもので無くても、参考データがあり、ある程度誤差が推測されているならば、それを事前分布として、実プラントでのデータから事後分布を求めることにより、誤差をリスク評価に利用することができる。

ここでは、従来の最尤推定法[5]とベイズ推定法により故障分布関数のパラメータを推定し比較検討した。

連絡先：笠井雅夫、〒015-0055 秋田県由利本荘市土谷字海老の口 84-4、秋田県立大学電子情報システム学科
電話: 0184-27-2094、e-mail:kasai@akita-pu.ac.jp

2．故障分布関数のパラメータ決定

2.1　最尤推定法

n 個の機器あるいは部品を一定時間(以降、試験期間)使用し、r 個の機器／部品が時刻 $t_1, t_2, \cdots t_r$ に故障したとする。一定期間(打切時間)を T とすると、例えばワイブル分布の場合、尤度関数 L は次式で表される。

$$L = \prod_{i=1}^{r}\left[\frac{m}{\tau}\cdot(\frac{t_i}{\tau})^{m-1}\cdot\exp\{-(\frac{t_i}{\tau})^m\}\right]\left[\exp\{-(\frac{T}{\tau})^m\}\right]^{n-r} \quad (1)$$

ワイブルパラメータ m、τ は、(1)式で与えられる尤度関数 L が最大となるように決められる。(1)式の代わりに(1)式の対数 $\log L$ を考え、これを最大にする m、τ は次式で与えられる。

$$r + m\sum_{i=1}^{r}\log(t_i/\tau) - \frac{m}{\tau^m}\{\sum_{i=1}^{r}t_i^m\log(t_i/\tau) + (n-r)T^m\log(T/\tau)\} = 0 \quad (2)$$

$$\tau = \left\{\frac{\sum_{i=1}^{r}x_i^m + (n-r)\cdot T^m}{r}\right\} \quad (3)$$

これらの(2)式および(3)式を連立して解くことにより、ワイブルパラメータ m、τ が求められる。

故障分布関数を用いて機器／部品等の取替周期の最適化を図る場合、リスクを的確に評価するためには、分布関数のパラメータの点推定値のみでなく区間推定値も必要である。ワイブル分布の場合、２つのパラメータ m、τ の両方とも未知の場合、両者の区間推定値を求めるのは難しい。ここでは、m の点推定値が分かっているとして、τ の区間推定を求めた場合の結果を照会する[5]。(4)式の統計量を考えると、$2S_r/\tau^m$ が自由度 $2r$ の χ^2 分布に従う。即ち、信頼係数 $1-\alpha$ の両側信頼区間は(5)式で表される。

$$S_r = \sum_{i=1}^{r} t_i^m + (n-r)T^m \tag{4}$$

$$\left(\frac{2S_r}{\chi^2(2r;\alpha/2)}, \frac{2S_r}{\chi^2(2r;1-\alpha/2)}\right) \tag{5}$$

片側区間も同様に(6)式で表される。

$$\left(\frac{2S_r}{\chi^2(2r;\alpha)}, \infty\right) \tag{6}$$

２.２　ベイズ推定法

ワイブル分布のパラメータ m、τ は統計的に推定されており、その事前分布は $\phi(m,\tau)$ と書けるとする。

２.１で述べた故障時刻データより、ワイブル分布のパラメータ m、τ の事後分布 $\phi'(m,\tau)$ はベイズ推定法を用いると次のようになる。

$$\phi'(m,\tau) = \frac{L(t_1,\cdots,t_r;m,\tau)\phi(m,\tau)}{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} L(t_1,\cdots,t_r;m,\tau)\phi(m,\tau)dmd\tau} \tag{7}$$

ここで、$L(t_1,\cdots,t_r;m,\tau)$ は(1)で与えられる尤度関数である。

ワイブル分布のパラメータ m、τ が独立な場合、$\phi(m,\tau)$ は次のように表される。

$$\phi(m,\tau) = \phi_m(m)\cdot\phi_\tau(\tau) \tag{8}$$

この場合、$\phi_m(m)$ あるいは $\phi_\tau(\tau)$ は、$\phi(m,\tau)$ より次のように求めることが出来る。

$$\phi_m(m) = \int_{-\infty}^{\infty}\phi(m,\tau)d\tau$$
$$\phi_\tau(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty}\phi(m,\tau)dm \tag{9}$$

但し、$\phi_m(m)$ および $\phi_\tau(\tau)$ はパラメータ m および τ に関する事前／事後分布である。

ベイズ推定の場合、こうして事後分布を求めることにより、点推定値および区間推定値が、難しい数学的取扱い無しに求める事が出来る。

３．故障分布関数のパラメータ決定試計算

３.１　試計算に用いた故障分布関数

ここでは、故障分布関数がワイブル分布の場合について、最尤推定法とベイズ推定法による結果を比較する。手順は、先ずパラメータ m、τ を仮定し、その故障分布関数(以降、基準関数)から、乱数により故障時刻を求め、そのデータを基に最尤推定法とベイズ推定法により m と τ を求め、それらの解の妥当性をみることとした。

今回の試計算の条件を Table 1 にまとめる。

Table 1　試計算条件

m	τ (1,000h)	T(1,000h)	機器数n	故障数r
2.5	150	40	100	4

$m=2.5$、$\tau=150{,}000$ h のワイブル分布の場合、機器数 100 台のうち、試験期間 $T=40{,}000$ h 内に故障する期待数は約 3.6 台となるため、ここでは、故障機器数を 4 台とし、４台の機器の故障時刻を乱数により決定した。Fig. 1 に $m=2.5$、$\tau=150{,}000$ h のワイブル分布に４台の機器の故障データをプロットした図を示す。

但し、機器の故障時刻から故障分布関数の値 F を算出する際には、下式で示すメジアンランクを用いた。

$$F = \frac{i-0.3}{n+0.4} \tag{10}$$

ここで、i は当該時刻までに故障した機器数を表し、n は総機器数である。

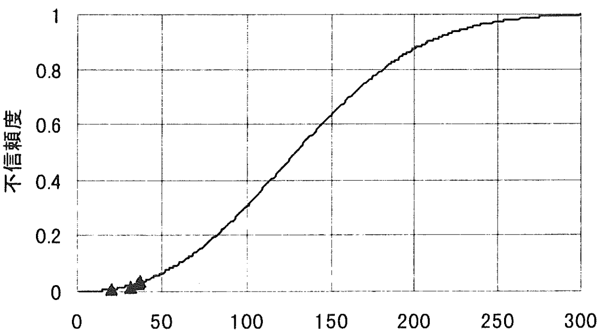

Fig. 1　基準関数

本図より、$\tau=150{,}000$ h に対し、試験期間 T を 40,000 h とした場合、故障分布関数の極初期の段階に

おける故障しか見ていない事が分かる。こうした設定は、機器の寿命の遙か以前に機器を交換してしまう日本の原子力プラントの実情を考慮した結果である。
より分かりやすく、作動時間の範囲 T = 40,000 h に狭めて表示した図を Fig. 2 に示す。

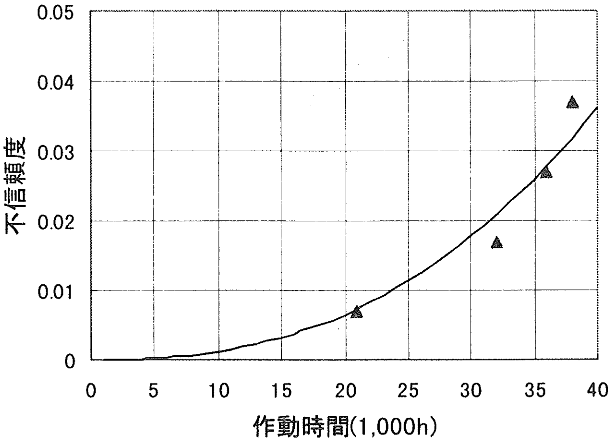

Fig. 2 故障データに基づく不信頼度(case 1)

本図に示した故障時刻データは、基準関数に良く合致しているケースである。

3.2 最尤推定法とベイズ推定法の比較

3.1に示したデータに対して、最尤推定法にて求めた m、τ は、m = 4.0、τ =90,000 h となった。m、τ がこの値の時の故障分布関数を Fig.3 に示す。

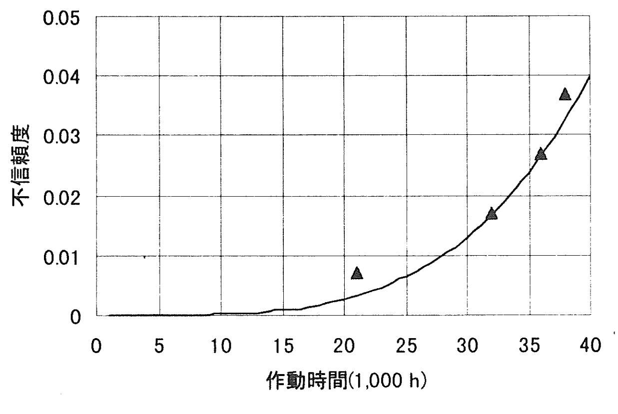

Fig. 3 最尤推定法により得た故障分布関数(case 1)

作動時間が時間スケールに比べて極限られた範囲であるため、m、τ の推定値は、故障を生み出した本来の故障分布関数とは異なったものとなっているが、データの範囲では妥当と判断される結果を与えている。

これに対し、同じ故障のデータについてベイズ推定を行った結果を Fig. 4 に示す。なお、m、τ の事前分布は一様分布を仮定している。

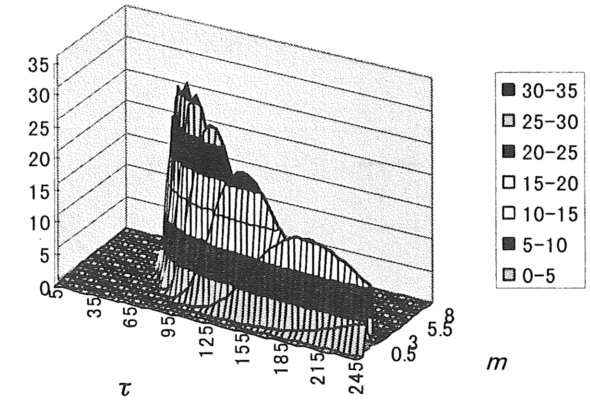

Fig. 4(a) ベイズ推定による m、τ 事後分布(case 1)

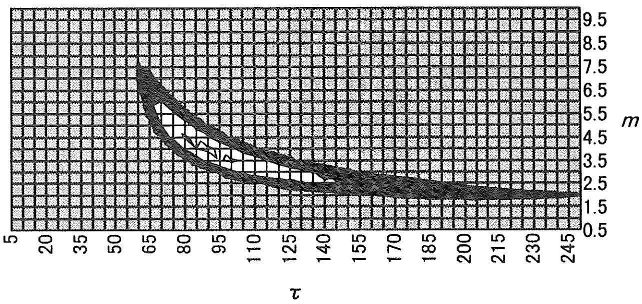

Fig.4(b) ベイズ推定による m、τ 事後分布(case 1)

事後分布の最大値は最尤推定法で得られた結果とほぼ同じ m = 4.0、τ =90,000 h で与えられている。しかし事後分布を見ると、特定の方向ではあるが、かなり広い分布を示しており、m = 2.5、τ = 150, 000 h である可能性も依然高い事が分かる。また、パラメータ m と τ の間には強い相関がある事も理解される。こうした強い相関の情報は、最尤推定法からは得る事が出来ない。m = 2.5 として、(5)式より区間推定を行うと、95%信頼区間として、$105(\times 1{,}000\,\mathrm{h}) \le \tau \le 242(\times 1{,}000\,\mathrm{h})$ を得る。また、m = 4.0 とすると、$73(\times 1{,}000\,\mathrm{h}) \le \tau \le 123(\times 1{,}000\,\mathrm{h})$ を得る。ベイズ推定法による事後分布と比較すると、m = 4.0 とした場合とは大きな矛盾はないが、m = 2.5 とした場合の区間推定とは上側が異なっている。

以上の比較検討は、故障時刻データが設定したデータ生成関数に比較的良く乗ったケースである。以下、よりデータ生成関数から逸れたデータや故障が1個しか生じなかったケースについて比較検討する。

まず、基準関数からかなり逸れた故障時刻データより推定した分布関数を Fig. 5 に示す。4つの故障時刻は、1,000 h を単位として、34, 35, 39, 40 である。これらのデータは生成に用いられた基準関数とはかけ離れ

たデータになっている事が分かる。ベイズ推定から得られた分布関数は故障時刻データを忠実に再現している。また、最尤推定法とベイズ推定とによる違いはほとんど無かった。

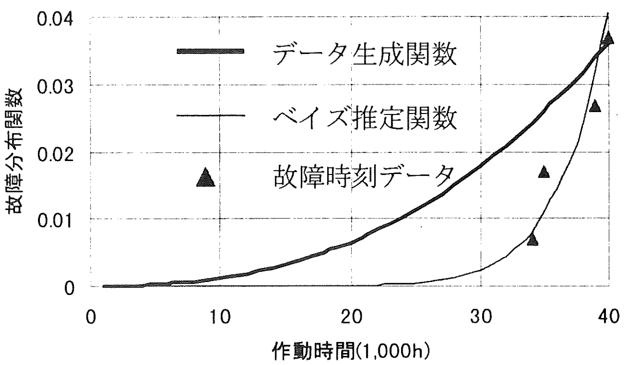

Fig. 5 ベイズ推定により得た故障分布関数(case 2)

データ収集の初期の段階において、当該機器がある使用環境条件の下で本来持っている劣化特性からかけ離れたデータが得られることは起こり得るが、データが集積するにつれ、本来の劣化特性が表れるはずである。Fig. 5 に示したデータを基に、さらに 4 故障時刻データを 4 セットを生成し、ベイズ推定がどう変化するかを調べた。その結果を Fig. 6 および Fig. 7 に示す。

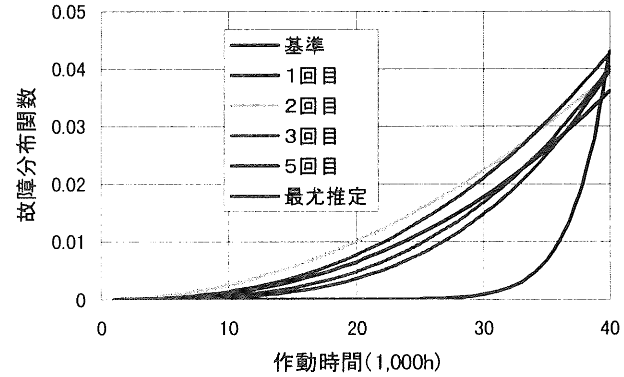

Fig. 6 推定された故障分布関数の推移(case3)

Fig. 6 では、初期の段階に本来の特性から外れていても、データの収集が進むに連れ、本来の特性に近づく様子が見える。本図における「最尤推定」は全 5 セットのデータから、最尤推定法により求めたもので、この場合も、点推定に関しては、ベイズ推定と最尤推定との結果は良く一致している。なお、この事は「1 回目」も含め、全ての段階について言える。

Fig. 7 はワイブル分布パラメータ m、τ の事後分布の推移を示したものである。なお、初期の事前分布には一様分布を仮定した。初期の広く広がった分布が急速に収束してくる様子が分かる。

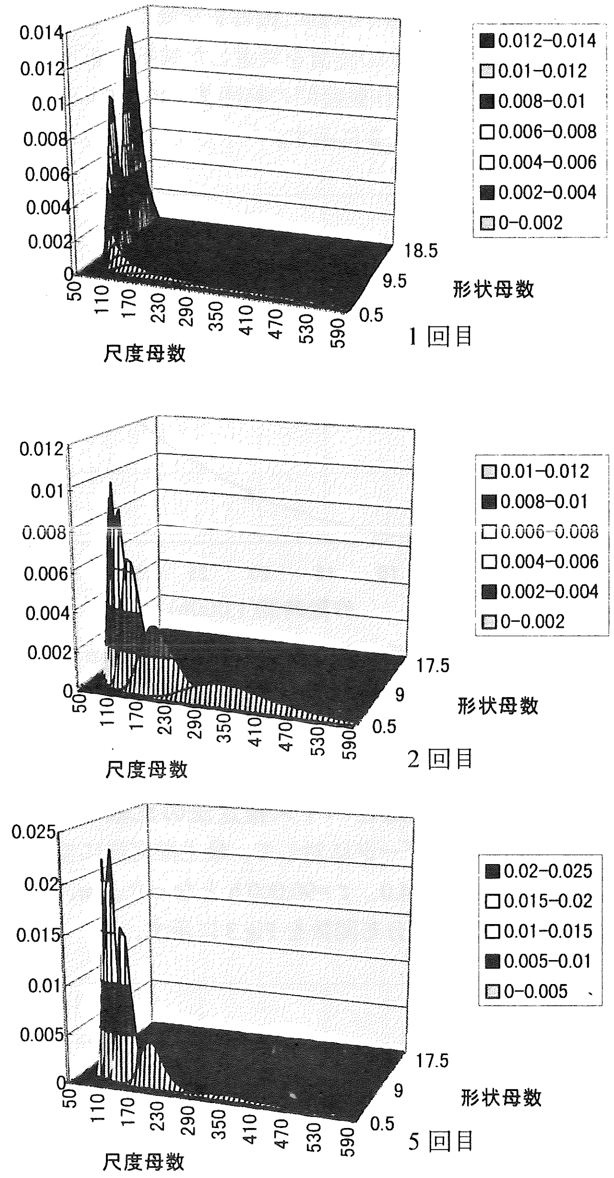

Fig. 7 パラメータ m、τ の事後分布の推移(case3)

次に、試験期間中の故障数が 1 回となるよう、試験時間をもっと短くしたケースについて説明する。試験期間を 24(×1,000 h)とした。データ生成用の基準分布関数は前と同じものを使う。

Fig. 8 に、1 つの故障時刻データから推定した m、τ から求めた故障分布関数を、故障時刻データ(三角形のマーク)と共に示した。例え、故障データ数が 1 個しかなくても、最尤推定法、ベイズ推定法とも、パラメータ m、τ を推定することができることが分かる。また点推定に関する限り、両者の違いはほとんど無いことも分かる。ただ、こうして推定されたパラメータ m、τ

を用いて保全の合理化を進める際には、大幅な外挿には危険が伴うことも理解される。

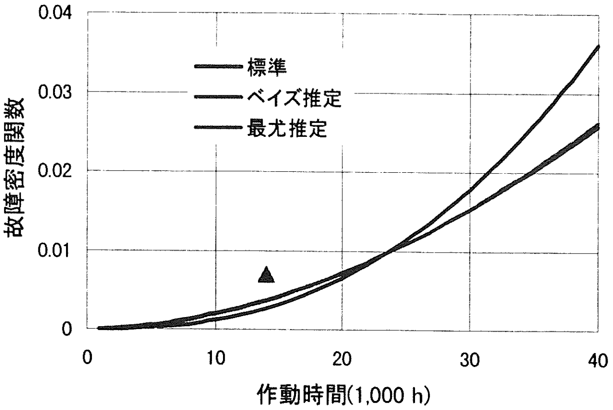

Fig. 8 1つの故障時刻データから推定した分布関数

100 台の機器を 24(×1,000 h)の期間で試験を5回繰り返した場合(総台数 500)に、ベイズ推定された故障密度関数がどのように変化するかを Fig. 9 に示す。

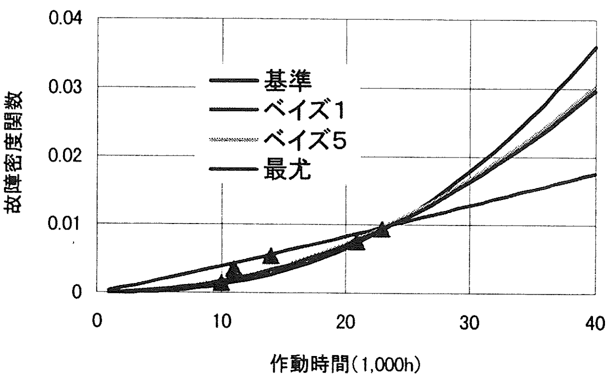

Fig. 9 推定された故障分布関数の推移(case4)

最初の推定(ベイズ1)の推定結果が Fig. 8 と異なっているが、これは、最初の故障時刻データが Fig. 8 の場合と異なるからである。これは、推定精度が悪い状態からスタートし、それがどう修正されていくかを見るために行ったものである。データの集積が進むに連れ、推定の精度が向上する様子が分かる。この場合にもまた、点推定の場合には、最尤推定法とベイズ推定法とで同様な結果が得られている。

4. 結言

実プラントでの使用期間を試験期間と見なすことにより、機器あるいは部品の故障分布関数を推定し、保全合理化に結びつけることが可能であることを確認する事を目的に、最尤推定法とベイズ推定法の比較評価、データの収集が進むに連れたベイズ推定の推移(事後分布の推移等)について検討した。その結果、次のような事が分かった。

(1) 故障分布関数のパラメータの点推定については、最尤推定法でもベイズ推定法でもほぼ同様な結果がれられる事が分かった。

(2) たまたま最初のデータが真の分布関数からずれていても、データが集積するに連れて推定値は改訂され、真の分布関数に近づくことが確認された。

(3) 極端に故障データ数が少なくても、推定が可能なことが確認された。

(4) 機器の寿命に達する相当前に交換してしまうような保全から得られたデータでも、分布関数の推定が可能であることが確認された。

(5) 保全合理化で故障分布関数を用いる場合、そのパラメータの信頼度を考慮する必要がある場合には、ベイズ推定法を採用せざるを得ない。

(6) 最尤推定法にせよベイズ推定法にせよ、推定の基となったデータの試験期間あるいは試用期間を大幅に越える外挿には危険が伴う。

参考文献

[1] (社)日本機械学会, RC198 軽水型原子力発電所保全研究分科会フェーズ3　研究報告書, 2004 年3月.

[2] 笠井雅夫, 浅野廣海, “プラント機器の取替周期最適化”,フォーラム保全学誌,Vol.1, No.1(2002), pp29-36

[3] 高瀬健太郎, 笠井雅夫, “プラント機器の取替・点検周期の最適化”, 保全学誌, Vol.2, No.2(2003), pp33-39

[4] 繁桝算男著、”ベイズ統計入門”、東京大学出版会

[5] 三根　久, 河合　一著, 信頼性・保全性の基礎数理, 日科技連, (1984)　pp.151-159.