

# 送信条件を考慮した過渡解析による Lamb 波伝播モードの振幅評価

Amplitude evaluation of Lamb wave propagating mode by transient analysis  
considering transmission condition

慶應義塾大学院 喜多村 健司 Kenji KITAMURA Member  
慶應義塾大学 杉浦 壽彦 Toshihiko SUGIURA Member

## Abstract

In nondestructive testing (NDT), ultrasonic testing (UT) can inspect internal defects of the material with a simple device. General UT is performed by point measurement. On the other hand, UT using guided waves that propagate long distance in pipe and plate structures is expected as an efficient inspection. However, there are multiple dispersive propagating modes in the same frequency band, and they are very complicated. For highly accurate inspection, it is important to determine the amplitude of each guided wave mode. Generally, the dispersion relation of the guided waves mode is determined by steady-state analysis, so the amplitude ratio for each mode cannot be determined. This study deals with Lamb waves that propagate plate among guided waves. The steady-state amplitude of each mode was obtained by transient analysis of the growth process of each mode.

**Keywords:** Nondestructive testing, Ultrasonic testing, Guided waves, Lamb waves, Transducers, Excitation  
Transient analysis

## 1. 結論

試料を破壊せずに欠陥を調べる非破壊検査の中で、超音波検査は内部欠陥を簡易な装置で検出できる。一般的な超音波検査は点測定で行われるのに対し、配管等を長距離伝播するガイド波を用いた検査は効率的な検査手法として期待されている。一方で、ガイド波は分散性を有した複数のモードが同じ周波数帯域に存在するため、複雑である。また、それぞれのモードは異なる変位分布を有し、モードごとに欠陥からの応答が異なる。精度の高いガイド波による検査のためには、探触子から発生した複数のモードの振幅を求めることや、特定のモードを選択的に励振することが必要である。特定のモードを励振するためにはモードの変位分布に近い加振を与えるという試行錯誤的な方法や、モードの波長に合わせた加振を与える方法がとられている\*1\*2。

本研究ではガイド波の中でも板材料を伝播する Lamb 波を扱い、探触子から発生する Lamb 波伝播モードの振幅を理論解析的に求めた。解析手法としては定常解で得られた変位分布が加振領域によって増大すると考え、加振領域のモードごとの増大比から定常振幅を求めた。

連絡先:喜多村健司、〒223-8522 神奈川県横浜市港北区日吉 3-14-1、慶應義塾大学、  
E-mail: kitamura@a6.keio.jp

## 2. 理論解析

### 2.1 Lamb 波定常解

Fig. 1 に示すような厚さ  $2h$  の板のモデルにおいて、加振のない定常領域での支配方程式を示す。

$$\rho \ddot{u} - (\lambda + \mu) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right) - \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = 0 \quad (1)$$

$$\rho \ddot{w} - (\lambda + \mu) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - \mu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) = 0 \quad (2)$$

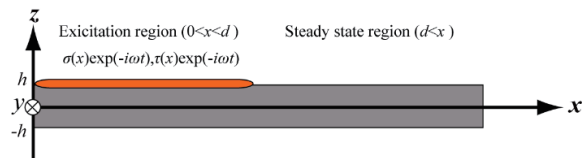


Fig.1 Schematic of two-dimensional analytical model

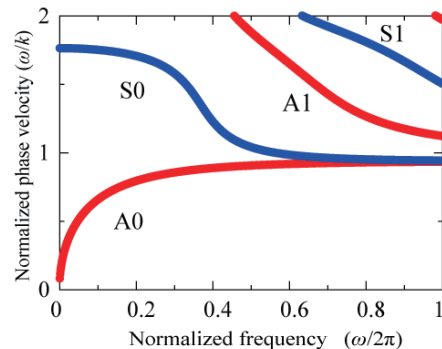


Fig.2 Normalized phase velocity dispersion curves (blue line: symmetric mode, red line: antisymmetric mode)

$$\left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] \Big|_{z=\pm h} = 0 \quad (3)$$

$$\left[ \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \right] \Big|_{z=\pm h} = 0 \quad (4)$$

$u$ ,  $w$  はそれぞれ  $x$  方向,  $z$  方向の変位,  $\rho$  は密度,  $\lambda$ ,  $\mu$  はラメ定数である。(1)-(4)式から変位が  $z$  方向の関数で分布している角周波数  $\omega$ , 波数  $k$  の波を仮定すると, Fig. 2 に示すような位相速度分散曲線が求まる. Fig. 2 は横波速度と  $h$  で無次元化している. 青線は  $u$  が  $x$  軸に対して対称に分布している対称モード, 赤線は反対称に分布している反対称モードである. (1)-(4)式から求まる Lamb 波定常解を以下に示す.

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \phi_{ix}(z) e^{i(k_i x - \omega t)} \quad (5)$$

$$w = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \phi_{iz}(z) e^{i(k_i x - \omega t)} \quad (6)$$

$\phi_i$ ,  $A_i$  は  $i$  モードの変位分布と振幅を表している.

## 2.2 Lamb 波の励振領域における解析

Fig. 1 の励振領域において, (3)(4)式は  $z=h$  で以下のようになる.

$$\left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] \Big|_{z=h} = \tau(x) e^{-i\omega t} \quad (7)$$

$$\left[ \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \right] \Big|_{z=h} = \sigma(x) e^{-i\omega t} \quad (8)$$

励振領域における Lamb 波の過渡的な解は, 定常解で得られた変位分布が伝播とともに増大しているとして,  $i$  モードの増大比  $B_i^j$  を用いて以下のように置く.

$$u^j = \sum_{i=1}^{\infty} B_i^j x \phi_{ix}^j(z) e^{i(k_i^j x - \omega t)} + \text{c. c.} \quad (9)$$

$$w^j = \sum_{i=1}^{\infty} B_i^j x \phi_{iz}^j(z) e^{i(k_i^j x - \omega t)} + \text{c. c.} \quad (10)$$

ここで  $j=S, A$  でそれぞれ対称モードと反対称モードを表す. 対称モードは  $x$  軸に対して, せん断応力は反対称,  $z$  軸方向の垂直応力は対称に分布している. 一方で反対称モードでは, せん断応力は対称,  $z$  軸方向の垂直応力は反対称に分布している. ここから境界での応力を対称モードと反対称モードに分離してフーリエ変換して  $B_i^j$  を求めると, 以下のようになる.

$$B_i^j = \int_0^d \frac{\tau^j(x) - \sigma^j(x)}{\mu \phi_{ix}^j(h) - \lambda \phi_{iz}^j(h)} dx \quad (11)$$

Fig. 3 に示すせん断応力のみ与えた励振領域で  $d = 18, P = 3, r = 1$  の場合の各モードの振幅を Fig. 4 に示す. 通常, 特定のモードを励振する場合は  $P$  をそのモードの半波長にあわせる. Fig. 4 でも  $P$  が各モードの半波長のときに振幅が極大となった. しかし, A0, A1, S1 モードの振幅のピークは,  $P$  が各モードの半波長ではない値であった. これはモード毎の変位分布と加振分布 ( $P, r, d$ ) の関係で決まると考えられる. 本研究の理論を用いることで特定のモードを効率的に励振できる送信条件を決めることができると考えられる.

## 3. 結論

本研究では, 特定の境界加振から発生する Lamb 波モードの振幅を理論解析で求めた. この理論を用いれば特定のモードを効率的に励振する探触子形状や加振分布を決定することができると考えられる.

## 参考文献

- [1] J. Lee and Y. Kim, "Tuned double-coil EMATs for omnidirectional symmetric mode lamb wave generation", NDT & E INTERNATIONAL, Vol.83, 2016, pp.38-47.
- [2] J. Koduru and J. Rose, "Transducer arrays for omnidirectional guided wave mode control in plate like structures", SMART MATERIALS AND STRUCTURES, Vol.22, No.1, 2013, 015010.

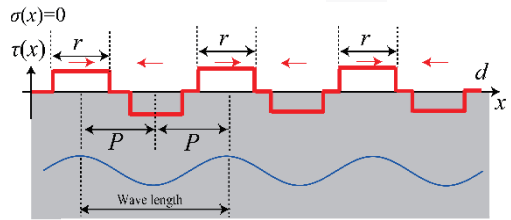


Fig.3 Shear stress at boundary

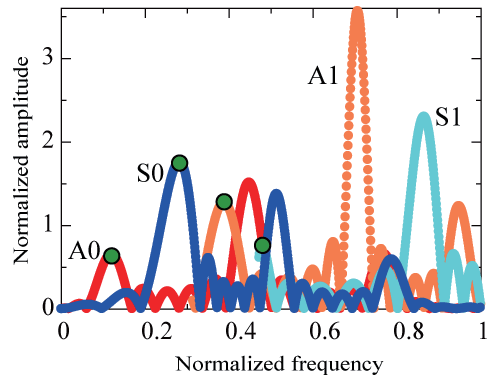


Fig.4 Normalized frequency-amplitude plots for S0, A0, S1 and A1 modes (Green points show results obtained when  $P$  was half wavelength of each mode.).